Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 38, núm. 2, 2023. Pàg. 113–142. DOI: 10.2436/20.2002.01.110

El mètode d'Eneström i Phragmén per a elegir un òrgan de representació mitjançant llistes obertes

Rosa Camps, Xavier Mora i Laia Saumell

Resum: L'elecció d'un òrgan de representació mitjançant una votació de llistes obertes requereix un algorisme adient per a determinar quins candidats resulten seleccionats. L'opció de seleccionar els més votats té el greu inconvenient que pot deixar molts electors sense representació. En aquest treball estudiem un algorisme alternatiu més just que va ser proposat al tombant dels segles XIX i XX per Gustaf Eneström i Edvard Phragmén. En comú amb altres propostes del mateix Phragmén, se suposa que els votants s'expressen mitjançant el vot d'aprovació, és a dir, cada elector indica una llista no ordenada dels candidats que li semblen bé com a representants seus. A diferència d'altres mètodes del mateix tipus, aquí es comença fixant una quota, és a dir, el nombre de vots que donen dret a un escó. De fet, el mètode d'Eneström i Phragmén es pot veure com una extensió del mètode de les restes majors a llistes obertes en lloc de llistes tancades, o també com una adaptació del vot únic transferible al vot d'aprovació en comptes del vot preferencial. Les propietats d'aquest mètode s'estudien i es comparen amb les d'altres mètodes del mateix tipus.

Paraules clau: llistes obertes, elecció d'un òrgan de representació, eleccions parlamentàries, representació proporcional, mètode d'Eneström i Phragmén.

Classificació MSC2020: 91B12, 91B14.

Introducció

Per a elegir un òrgan de representació mitjançant llistes obertes no ordenades no és apropiat triar els més votats, ja que aquests poden correspondre només a una part de l'electorat, potser fins i tot minoritària en comparació amb el total. Suposem, per exemple, que es tracta d'elegir quatre representants i que els vots són com segueix:

$$38\,a\,b\,c\,d, \quad 33\,k\,l\,m\,n, \quad 29\,p\,q\,r\,s, \tag{1}$$

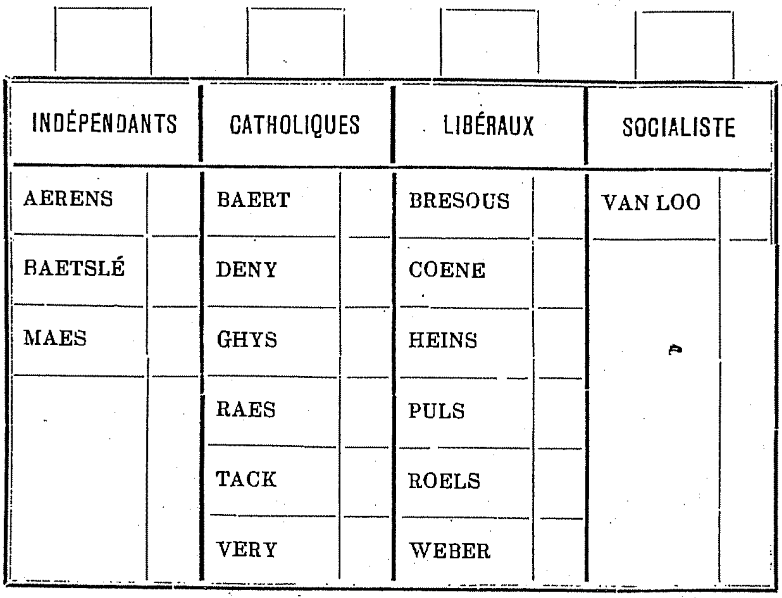
on volem dir que 38 electors admetrien com a representants seus qualssevol dels candidats a, b, c, d, mentre que 33 electors indiquen els candidats k, l, m, n, i uns altres 29 electors es pronuncien per p, q, r, s. Aquests

Aquest article és una adaptació al català del nostre manuscrit «The method of Eneström and Phragmén for parliamentary elections by means of approval voting» (`https://arxiv.org/abs/1907.10590`).

vots tenen l'aspecte de correspondre a unes llistes tancades. Tanmateix, també són compatibles amb un plantejament de llistes obertes, ja que aquest plantejament no impedeix que diversos electors votin la mateixa llista. Sigui com sigui, amb els vots (1) la regla dels més votats elegeix els candidats a, b, c, d, que tenen tots ells 38 vots. Aquest resultat concentra tota la representació en un 38 % de l'electorat i deixa sense representació el 62 % restant. En lloc d'això, un bon algorisme hauria de procurar donar representació a tots els electors de manera equitativa.

Darrerament, s'ha recuperat l'interès per diversos mètodes de finals del segle XIX que desenvolupen aquesta idea en el cas de llistes obertes. Vegeu, per exemple, [1, 2, 3, 15, 16, 20, 22] i les seves referències.

En aquest article analitzem una proposta concreta que està associada amb els noms de Gustaf Eneström i Edvard Phragmén. Com en altres obres més conegudes de Phragmén ([25, 26, 27, 29]), se suposa que els electors s'expressen mitjançant el *vot d'aprovació*, és a dir, que cada elector indica una llista no ordenada dels candidats que aprova per a representar-lo. Tanmateix, el procediment d'Eneström i Phragmén difereix del d'aquelles altres obres en què es comença per fixar la *quota*, és a dir, el nombre de vots que donarà dret a un escó. De fet, el mètode que estudiem es pot veure com una extensió al cas de llistes obertes no ordenades de dos mètodes clàssics de representació proporcional que també comencen per fixar la quota, a saber, el mètode del vot únic transferible i el de les restes majors.



INDÉPENDANTS	CATHOLIQUES	LIBÉRAUX	SOCIALISTE
AERENS	BAERT	BRESOUS	VAN LOO
BAETSLÉ	DENY	COENE	
MAES	GHYS	HEINS	
	RAES	PULS	
	TACK	ROELS	
	VERY	WEBER	

FIGURA 1: Exemple de butlleta de llista oberta segons D'Hondt [6]. L'elector pot marcar fins a sis candidats qualssevol, possiblement de llistes diferents. Alternativament, pot marcar una de les caselles de la part superior, que equival a marcar tots els candidats d'aquella llista.

El mètode del *vot únic transferible* utilitza el *vot preferencial*, és a dir, cada elector indica no només el seu candidat preferit, sinó que també pot donar una segona opció, una tercera, i així successivament fins on cregui oportú. Per a determinar quins candidats són elegits, es comença per fixar la quota, és a dir, el nombre de vots que ha d'aconseguir o superar un candidat per tal de resultar elegit. En principi, cada candidat té només els vots on apareix com a primera opció. Tanmateix, quan un candidat supera la quota i resulta elegit, cadascun dels vots sobrants és transferit al candidat que ocupa el lloc següent en la butlleta. La idea és aplicar aquest procés reiteradament fins que quedin assignats tots els escons que hi havia per repartir. Si en algun moment s'escau que no hi ha cap candidat que assoleixi la quota, aleshores s'elimina el que en aquell moment té menys vots i cadascun d'aquests vots és transferit al candidat següent en la butlleta. I si només resten en peu tants candidats com escons pendents de repartir, llavors s'admeten tots aquests candidats, sigui quin sigui el seu nombre de vots. Per a més detalls remetem el lector a [39].

El mètode de les *restes majors* suposa que els electors es limiten a triar entre diverses llistes tancades, és a dir, unes llistes disjuntes de candidats les quals han estat plantejades prèviament. A partir dels vots obtinguts per cada llista, es tracta de determinar quants representants corresponen a cadascuna d'elles. Amb aquesta finalitat, es pren el nombre de vots de cada llista i es divideix per la quota. D'entrada, cada llista rep tants escons com indica la part entera del quocient. Si això no adjudica tots els escons, llavors els que queden són assignats un a un a les llistes que obtenen els residus majors en les divisions precedents.

El mètode que estudiem en aquest article va ser formulat clarament per Eneström el 1896 [7]. Posteriorment, Gustav Cassel va descriure el mateix procediment el 1903 [5] sota el nom de «primer mètode de Phragmén». De fet, la idea bàsica del procediment és present en una ressenya a la premsa d'una conferència que Phragmén havia pronunciat el 1893 [24] (tot i que la proposta final d'aquella conferència es basava en el vot preferencial). En els anys següents, Phragmén es va concentrar en una idea diferent, sense cap comentari sobre el treball d'Eneström [7] (que de ben segur que coneixia; vegeu les cartes als diaris d'Eneström i Phragmén [8, 28], publicades conjuntament el mateix dia). Tanmateix, més tard va tornar a la idea inicial (però en termes del vot d'aprovació) i va considerar diverses variacions. Això es va fer en tres memòries de difusió molt limitada de 1906 [30, 31, 32].

Aquestes memòries van ser motivades per una petició de Finlàndia arran d'una reforma parlamentària. Aquesta petició s'havia dirigit a Gösta Mittag-Leffler i als seus col·legues matemàtics d'Estocolm, que també estaven interessats en el tema per al cas de Suècia mateix [36, p. 512–513].

Dit això, ni Finlàndia ni Suècia no van adoptar la proposta de Phragmén.

En el cas de Finlàndia, es va adoptar (1907) un mètode basat en el vot preferencial. Concretament, es va adoptar el mètode de Borda harmònic, que descrivim a l'apartat 5.5.

En el cas de Suècia, es va adoptar (1909) un mètode basat en el vot d'aprovació. Tot i que en principi no era obligatori, a la pràctica la major part dels electors restringien la seva llista a un partit, el qual indicaven en el seu vot. L'algorisme es reduïa llavors essencialment a aplicar la regla de D'Hondt junt amb unes regles suplementàries per a determinar quins candidats concrets s'elegien de cada partit. Una d'elles és la regla d'addició de Thiele, la qual descrivim a l'apartat 5.2.1.

Per a més detalls històrics remetem el lector a [13, apèndixs III, IV], així com a [15].

Com veurem, el mètode d'Eneström i Phragmén —més concretament, la variant que detallarem a continuació— gaudeix d'unes propietats de proporcionalitat (teoremes 2.1 i 2.2) que no tenen ni el mètode de Borda harmònic, llavors adoptat per Finlàndia, ni el d'addició de Thiele, llavors adoptat per Suècia. D'altra banda, la comparació amb la proposta de Phragmén de 1894–1899 —anomenada «segon mètode de Phragmén» per Cassel [5]— és més disputada, amb algun avantatge a favor del mètode d'Eneström i Phragmén pel que fa a la simplicitat.

A més de candidats individuals, també permetrem que un candidat sigui un conjunt format per diversos individus. Això és adequat per a tractar el cas, hipotètic però amb prou de sentit, en què les opcions que se sotmeten al vot d'aprovació no són candidats individuals, sinó unes candidatures col·lectives disjuntes (similarment a [12], on es fa una proposta d'aquest tipus però usant el vot preferencial). En aquest cas, s'espera que el mètode respongui a la pregunta de quants escons s'han d'assignar a cada candidatura.

1 El procediment

1.1 Preliminars

El procediment d'Eneström i Phragmén reparteix un nombre determinat d'escons entre diversos candidats que han estat sotmesos a un vot d'aprovació per un conjunt d'electors. Té un caràcter iteratiu. En cada pas s'assigna un escó al candidat amb el major nombre de vots i els vots utilitzats perden una fracció del seu valor d'acord amb una quota fixada prèviament.

Utilitzarem la *notació* següent:

n	nombre d'escons a repartir
I	conjunt de candidats elegibles
i	un candidat
m_i	capacitat del candidat i, és a dir, nombre d'escons que pot omplir (= 1 per a candidats individuals)
k	un «tipus» de vots (o electors)
A_k	conjunt de candidats aprovats pels electors k (suposem $A_k \neq \emptyset$)
$k \surd i$	una altra manera de dir que $i \in A_k$

v	nombre total de vots
v_k	nombre de vots de tipus k $(\sum_k v_k = v)$
w_i	nombre de vots que aproven i: $w_i = \sum_{k \surd i} v_k$
n_i	nombre d'escons assignats al candidat i $(n_i \leq m_i)$
J	un subconjunt de candidats
m_J	capacitat del conjunt J: $m_J = \sum_{i \in J} m_i$
v_J	nombre de vots que aproven exactament el conjunt J: $v_J = \sum_{k, A_k = J} v_k$
y_J	nombre de vots que aproven tots els candidats de J: $y_J = \sum_{k, A_k \supseteq J} v_k$, evidentment, $v_J \leq y_J$
n_J	nombre total d'escons assignats a membres de J: $n_J = \sum_{i \in J} n_i$
q	quota, és a dir, nombre de vots que donen dret a un escó
s	número ordinal en el procés iteratiu d'assignació d'escons
$\mathsf{x}[s]$	valor de x després d'assignar l'escó s, on x pot ser v, v_k, w_i, $n_i, \ldots$
$I[s]$	conjunt de candidats encara elegibles després d'assignar l'escó s, és a dir, tals que $n_i[s] < m_i$

1.2 Versió bàsica

Les obres d'Eneström i Phragmén contenen diferents variacions en diversos aspectes. Per tal d'aconseguir millors propietats, hem triat la combinació particular que es descriu a continuació (que no és exactament cap de les versions considerades per aquests autors).

Per començar, s'adopta la quota (no arrodonida) de Droop i Hagenbach-Bischoff [33]:

$$q = v/(n+1).$$

Els n escons s'assignen mitjançant un procediment iteratiu. D'ara endavant, s serà un comptador que augmentarà de 0 a n. Comencem amb $s = 0$, $v_k[0] = v_k$ (el nombre de vots de cada tipus k), $n_i[0] = 0$ (no s'ha assignat cap escó) i $I[0] = I$ (tots els candidats són elegibles).

Per a cada s i cada $i \in I[s]$ (els candidats elegibles) es tenen en compte els vots actualment existents a favor del candidat i:

$$w_i[s] = \sum_{k \surd i} v_k[s].$$

L'escó $s+1$ s'assigna a un candidat $i_* \in I[s]$ que maximitzi aquest nombre de vots, és a dir, tal que

$$w_{i_*}[s] = \max_{i \in I[s]} w_i[s] =: w_*[s]$$

(si hi ha diversos maximitzadors, es permet qualsevol d'ells). Per tant,

$$n_{i_*}[s+1] = n_{i_*}[s] + 1,$$

i aquest candidat deixa de ser elegible si ha exhaurit la seva capacitat:

$$I[s+1] = I[s] \setminus \{i_*\}, \quad \text{si } n_{i_*}[s+1] = m_{i_*}.$$

L'assignació de l'escó $s+1$ al candidat i_* es fa a canvi d'una determinada fracció dels $w_*[s]$ vots que li donen suport. Més concretament, els vots a favor de i_* perden valor d'acord amb un factor comú:

$$v_k[s+1] = \left(1 - \frac{q}{w_*[s]}\right) v_k[s], \quad \text{si } k \surd i_* \text{ i } w_*[s] \geq q, \tag{2}$$

$$v_k[s+1] = 0, \quad \text{si } k \surd i_* \text{ i } w_*[s] < q, \tag{3}$$

$$v_k[s+1] = v_k[s], \quad \text{si } k \not\surd i_*. \tag{4}$$

Com es pot comprovar fàcilment, en el cas $w_*[s] \geq q$ es compleixen les igualtats següents:

$$w_{i_*}[s+1] = w_{i_*}[s] - q, \tag{5}$$

$$v[s+1] = v[s] - q. \tag{6}$$

És a dir, l'escó $s+1$ s'ha assignat exactament a canvi d'una quota.

En el cas $w_*[s] < q$, l'escó s'assigna a canvi de tots els vots existents a favor de i_*, malgrat que no completin una quota. Per tant, en aquest cas es té

$$w_{i_*}[s+1] = 0,$$
$$v[s+1] > v[s] - q.$$

Si $s+1 = n$, ja hem acabat. En cas contrari, es repeteix el procediment canviant s per $s+1$.

Observació 1.1. Estem suposant que el conjunt de candidats i tals que $w_i > 0$ conté almenys n elements.

Observació 1.2. De les igualtats (2)–(4) se'n dedueix que $v_k[s]$, $w_i[s]$ i $w_*[s]$ són funcions no creixents de s.

Més avall serà d'utilitat el lema següent, que és conseqüència immediata de (6) i del fet que $\max_i v_i[n] \leq \sum_i v_i[n]$:

Lema 1.1. *Si $w_*[s] \geq q$ per a tota $s < n$, llavors $w_*[n] \leq v[n] = v[0] - nq = q$.*

Exemple 1.1. Considerem l'elecció de tres representants entre els nou candidats a, b, e, f, u, v, x, y, z amb els vots d'aprovació següents:

$$s=0: \quad 21\, a\, b\, x, \quad 20\, a\, b\, e\, f, \quad 19\, e\, f\, u\, v, \quad 13\, u\, v, \quad 10\, x\, y, \quad 15\, z, \quad 2\, a\, e\, u.$$

El nombre total de vots és $v = 100$. Per tant, la quota és $q = v/(n+1) = 100/4 = 25$. Segons aquests vots, el suport w_i que té cada candidat i és el següent:

$$s=0: \quad a\ 43, \quad b\ 41, \quad e\ 41, \quad f\ 39, \quad u\ 34, \quad v\ 32, \quad x\ 31, \quad y\ 10, \quad z\ 15.$$

El valor més alt és el del candidat a, que, per tant, resulta escollit. D'acord amb (2), els vots que contenen a veuen reduït el seu valor segons el factor $(1 - 25/43) = 0.419$. Això dona com a resultat les xifres següents de vots:

$$\begin{array}{lllll} s=1: & 8.791\,a\,b\,x, & 8.372\,a\,b\,e\,f, & 19\,e\,f\,u\,v, & 13\,u\,v, \\ & 10\,x\,y, & 15\,z, & 0.837\,a\,e\,u. & \end{array}$$

El suport que té ara cada candidat és el següent, on utilitzem parèntesis per a indicar aquells candidats que ja han estat elegits i, per tant, ja no són elegibles:

$$\begin{array}{llllll} s=1: & (a\ 18), & b\ 17.163, & e\ 28.209, & f\ 27.372, & u\ 32.837, \\ & v\ 32, & x\ 18.791, & y\ 10, & z\ 15. & \end{array}$$

Així doncs, el segon candidat escollit és u. Els vots que contenen aquest candidat es redueixen ara pel factor $(1 - 25/32.837) = 0.239$:

$$\begin{array}{lllll} s=2: & 8.791\,a\,b\,x, & 8.372\,a\,b\,e\,f, & 4.535\,e\,f\,u\,v, & 3.103\,u\,v, \\ & 10\,x\,y, & 15\,z, & 0.200\,a\,e\,u, & \end{array}$$

que dona lloc als valors següents de w_i:

$$\begin{array}{llllll} s=2: & (a\ 17.363), & b\ 17.163, & e\ 13.107, & f\ 12.907, & \\ & (u\ 7.837), & v\ 7.637, & x\ 18.791, & y\ 10, & z\ 15. \end{array}$$

Per tant, x és elegit en tercer lloc, tot i tenir menys d'una quota. Els tres candidats triats són, doncs, a, u i x. Tot i que ja sabem qui ha estat triat, més endavant (secció 7) necessitarem conèixer també els vots romanents, que són els següents:

$$\begin{array}{lllll} s=3: & 0\,a\,b\,x, & 8.372\,a\,b\,e\,f, & 4.535\,e\,f\,u\,v, & 3.103\,u\,v, \\ & 0\,x\,y, & 15\,z, & 0.200\,a\,e\,u. & \end{array}$$

1.3 Variants

1.3.1 Fraccions simples. A [30, 31, 32] les equacions (2)–(3) són substituïdes per la següent:

$$v_k[s+1] = \left(1 - \frac{1}{\lceil w_*[s]/q \rceil}\right) v_k[s], \quad \text{per a } k \surd i_*. \tag{7}$$

Noteu que aquesta equació coincideix amb (2)–(3) en el cas $w_*[s] \leq q$. Tanmateix, quan $w_*[s]/q$ no és enter i supera 1, l'escó s'assigna a canvi de menys d'una quota; en altres paraules, els signes d'igualtat de (5) i (6) se substitueixen per «≥». Probablement, el factor racional de (7) estava pensat per a facilitar el càlcul a mà. Una altra possible motivació podria ser la comparació amb el mètode d'addició de Thiele (vegeu l'apartat 5.2.1).

1.3.2 Altres quotes. Les versions inicials d'aquest mètode [7, 30, 31] (vegeu també [5, p. 47–50]) usaven la quota de Hare (també anomenada *quota simple*) $q = v/n$. Amb aquesta quota, el procediment anterior és una extensió del mètode estàndard de les restes majors. Segons Mittag-Leffler [21], la quota de Droop i Hagenbach-Bischoff aconsegueix resultats millors en comparació amb el mètode d'addició de Thiele (vegeu les propietats de proporcionalitat que estudiem a la secció 2 i la seva manca a l'apartat 5.2.1). D'altra banda, també cal notar que la quota de Droop i Hagenbach-Bischoff ja havia estat utilitzada per Phragmén el 1893 [24] en càlculs anàlegs a (2)–(4).

1.3.3 Quota actualitzada a cada pas. [30] utilitza la fórmula (7), però la quota (de Hare) $q = v[0]/n$ es va actualitzant d'acord amb l'expressió $q'[s] = v[s]/(n-s)$ (com si cada vegada tornéssim a començar amb els vots i escons que queden en aquell moment). Noteu que $q'[s]$ no difereix de q fins que no s'assignen escons per menys d'una quota.

1.3.4 Els vots deixen de comptar quan queden buits (aquesta variant només canvia les coses quan es combina amb l'anterior)**.** En aquesta variant, l'equació (2) només s'utilitza quan els vots de tipus k contenen més candidats elegibles, és a dir, quan $A_k \cap I[s+1] \neq \emptyset$; en cas contrari, es posa $v_k[s+1] = 0$.

1.3.5 Condició de llindar. Quan hi ha un gran nombre de candidats, llavors pot passar fàcilment que $w_*[s]$ sigui molt més petit que q i, per tant, i_* aconsegueixi un escó amb molt menys d'una quota. En relació amb això, Phragmén ([31, 32]) proposava d'exigir una condició de la forma $w_*[s]/q \geq \alpha$ per a algun llindar $\alpha \in [0,1]$ fixat prèviament; si no es compleix aquesta condició, el procediment s'aturaria i es convocarien noves eleccions. Més concretament, va suggerir $\alpha = 3/4$ [31, 32] o $\alpha = 1/2$ [30]. En la nostra versió bàsica no hem inclòs aquesta condició, la qual cosa equival a prendre $\alpha = 0$ (tal com passa amb la formulació habitual del mètode de les restes majors).

1.3.6 Nombres negatius de vots. Aquesta variant aplica (2) independentment de si $w_*[s]$ és més gran o més petit que q. Això pot donar lloc a valors negatius de $v_k[s+1]$ per a $k \surd i_*$. Tot i així, podria tenir sentit per a evitar una sobrerepresentació dels electors de tipus k en passos posteriors.

1.4 Vot uninominal

Les proposicions següents especifiquen el comportament del mètode d'Eneström-Phragmén en el cas del vot uninominal, és a dir, quan cada elector aprova un candidat i només un. La primera proposició, la prova de la qual és òbvia, es refereix al cas de candidats individuals. La segona es refereix al cas de candidats col·lectius disjunts (llistes tancades).

PROPOSICIÓ 1.1. *Suposem que tots els candidats tenen capacitat* 1 *i que cada elector n'aprova un i només un. En aquest cas, el mètode d'Eneström-Phragmén consisteix a seleccionar els* n *candidats més votats.*

En el cas de candidats individuals, la situació uninominal és certament poc desitjable en l'esperit de la representació proporcional, perquè una majoria simple d'electors podria organitzar-se per a aconseguir més escons dels que li corresponen. No obstant això, en aquesta situació no hi ha millor opció que triar els candidats més votats. Afortunadament, a la pràctica, els electors es veuran conduïts a aprovar més d'un candidat. Els que tinguin una opinió minoritària ho faran per proporcionar candidats alternatius amb més possibilitats. I els que tinguin una opinió majoritària ho faran per obtenir més representants.

En el cas de les llistes tancades (disjuntes), la situació uninominal sí que permet un resultat en l'esperit de la representació proporcional:

PROPOSICIÓ 1.2. *Suposem que tots els candidats tenen capacitat il·limitada i que cada elector n'aprova un i només un. En aquest cas, el mètode d'Eneström-Phragmén equival al mètode de les restes majors amb la quota de Droop.*

DEMOSTRACIÓ. Aquí cada tipus k correspon a un sol candidat i i viceversa. Per tant, podem escriure v_i en lloc de v_k o w_i. A continuació distingirem dos casos.

Cas (a): $w_*[n] < q$. Considerem el número

$$t = \min\{s \mid w_*[s] < q\}, \tag{8}$$

i sigui t_i el nombre d'escons que han estat assignats a i en els primers t passos del procediment, és a dir, per a $s = 0 \dots t-1$. La hipòtesi que defineix aquest cas garanteix que $t \le n$. Segons la definició de t, per a $s < t$ cada escó és assignat a canvi d'una quota exacta. Per tant, $v_i[t] = v_i[0] - t_i\,q$, o, equivalentment,

$$v_i[0] = t_i\,q + v_i[t], \quad \text{on } 0 \le v_i[t] < q.$$

Aquí, la desigualtat estricta de la dreta és certa perquè $v_i[t] \le w_*[t] < q$. Així doncs, $v_i[t]$ és el residu de dividir el nombre de vots $v_i[0]$ per la quota q. Si $t = n$, llavors no hi ha més escons per assignar i $n_i = t_i$. Si $t < n$, aleshores per a $t \le s < n$ cada escó és assignat a canvi del residu $v_i[t]$ (la qual cosa només pot passar una vegada per a cada candidat). Per tant, aquests $n - t$ escons són assignats als $n - t$ candidats amb les restes majors $v_i[t]$.

Cas (b): $w_*[n] \ge q$. Com que $w_*[s]$ no creix amb s (observació 1.2), , d'això se'n dedueix que $w_*[s] \ge q$ per a tota $s < n$. A partir d'aquí, el lema 1.1 garanteix que $w_*[n] \le v[n] = q$. I, combinant-ho amb la hipòtesi d'aquest cas (b), tenim, per tant, $w_*[n] = q = v[n]$. Això implica l'existència d'algun candidat j tal que $v_j[n] = q$, mentre que $v_i[n] = 0$ per a $i \ne j$. Així doncs, j ha obtingut un escó menys que el nombre de quotes contingudes a $v_j[0]$. I qualsevol $i \ne j$ ha obtingut tants escons com el nombre exacte de quotes contingudes a $v_i[0]$ (ja que $v_i[0] = v_i[n] + n_i\,q = n_i\,q$). Així doncs, els nombres inicials de vots dels diferents candidats eren tots ells múltiples enters de q. Llevat del cas d'unanimitat total, això implica que el procés d'assignació d'escons s'ha trobat amb certes situacions d'empat que permeten transferir el dèficit d'un escó des de j a qualsevol altre candidat i amb un nombre positiu de vots, ben bé com en el mètode de les restes majors (amb la quota de Droop).□

2 Propietats de proporcionalitat

Segons Phragmén [31], «per al lector versat en matemàtiques, el caràcter proporcional de la regla proposada de reducció de la força dels vots hauria d'estar clar sense més explicació».

En el cas de llistes tancades (i disjuntes), els vots classifiquen els electors de manera totalment paral·lela als candidats. Això permet comptar exactament quants electors hi ha de cada classe i plantejar-se si un repartiment determinat dels escons entre les diferents llistes és més o menys proporcional a la distribució de vots entre elles. Tindríem proporcionalitat exacta si els quocients dels nombres respectius (de vots i d'escons) fossin tots exactament iguals. Això difícilment es pot aconseguir, perquè estem parlant de números enters, però existeixen diversos algorismes —restes majors, D'Hondt, Sainte-Laguë— que busquen la manera d'acostar-se tant com es pugui (en un cert sentit que varia segons l'algorisme) a la proporcionalitat exacta.

Aquest plantejament no és possible en general en el cas de llistes obertes, ja que llavors no hi ha una classificació ben definida, ni de candidats ni d'electors. Dit això, tot seguit veurem que el mètode d'Eneström i Phragmén té la propietat següent: si alguns electors aproven exactament els mateixos candidats i el nombre de tals electors supera ℓ vegades la quota, llavors aquest conjunt de candidats proporciona almenys ℓ representants. O sigui, que en aquesta situació especial de vots exactament iguals, la quota actua realment com a constant de proporcionalitat entre vots i escons.

Aquesta propietat deixa d'estar garantida si els electors en qüestió aproven també altres candidats (a més dels que aproven en comú). Per exemple, en el cas

$$10\,a\,b, \quad 10\,a\,c, \quad 19\,b, \quad 18\,c, \quad n = 2,$$

el nombre d'electors que aproven el candidat a és 20, que supera la quota $57/3 = 19$; tanmateix, el mètode d'Eneström i Phragmén no elegeix pas a, sinó b i c. Noteu, per cert, que aquesta elecció està donant representació a tots els electors, a diferència del cas d'elegir a i un altre candidat. Com veurem més avall, en situacions d'aquest tipus està garantit que si el nombre d'electors en qüestió supera ℓ vegades la quota, llavors els representants elegits n'inclouen almenys ℓ que es troben en la unió dels conjunts aprovats per aquells electors.

Recordem de l'apartat 1.1 que, donat un conjunt J de candidats, m_J és la seva capacitat, i v_J i y_J signifiquen, respectivament, el nombre de vots que aproven exactament el conjunt J i el nombre dels que aproven *almenys* el conjunt J. En relació amb això, usarem també la notació següent:

$$J^* = \bigcup\{A_k \mid k \text{ tal que } A_k \supseteq J\}.$$

Així doncs, $i \in J^*$ si i només si i és aprovat per almenys un elector que també aprova tots els elements de J.

TEOREMA 2.1. *Per a qualsevol subconjunt J de candidats i qualsevol $\ell \leq \min(n, m_J)$, si $v_J > \ell\, q$, llavors $n_J \geq \ell$.*

TEOREMA 2.2 (vegeu també [35, p. 4–6]). *Per a qualsevol subconjunt J de candidats i qualsevol $\ell \leq \min(n, m_J)$, si $y_J > \ell\, q$, llavors $n_{J^*} \geq \ell$.*

PREPARACIÓ PER A LES DEMOSTRACIONS. En lloc del número t de (8), aquí considerarem el següent:

$$p = \min\{s \mid w_*[s] \leq q\}. \tag{9}$$

Afirmem que $p \leq n$, és a dir, $w_*[s] \leq q$ per a alguna $s \leq n$. En efecte, si suposem el contrari, és a dir, $w_*[s] > q$ per a qualsevol $s \leq n$, el lema 1.1 permet deduir la desigualtat $w_*[n] \leq q$, que contradiu la hipòtesi de reducció a l'absurd.

Per a qualsevol subconjunt J de candidats, considerarem el nombre p_J de candidats de J que són elegits en els primers p passos del procediment, és a dir, per a $s = 0 \ldots p-1$. Òbviament, $p_J \leq n_J$. Per tant, per a establir els teoremes 2.1 i 2.2 bastarà demostrar respectivament les desigualtats $p_J \geq \ell$ i $p_{J^*} \geq \ell$.

En les demostracions que segueixen limitem la nostra consideració a $s = 0 \ldots p-1$, valors per als quals està assegurat que $w_*[s] > q$. El candidat que és elegit en el pas s el denotarem amb $i_*[s]$.

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 2.1. Com que $v_J = \sum_{A_k = J} v_k$, quan $i_*[s] \in J$, l'equació (2) implica

$$v_J[s+1] = \left(1 - \frac{q}{w_*[s]}\right) v_J[s] \geq v_J[s] - q,$$

on hem usat el fet que $w_*[s] = w_{i_*[s]}[s] \geq v_J[s]$. D'altra banda, quan $i_*[s] \notin J$, l'equació (4) implica que $v_J[s+1] = v_J[s]$. Per tant, es compleix la desigualtat

$$v_J[p] \geq v_J - p_J\, q.$$

Suposem ara que es compleix la hipòtesi $v_J > \ell\, q$ i també la negació de la conclusió, és a dir, $p_J \leq \ell - 1$. Com que estem suposant $\ell \leq m_J$, existeix algun candidat $j \in J$ que segueix essent elegible després del pas p. Això permet escriure la cadena de desigualtats següent, en contradicció amb la definició de p:

$$w_*[p] \geq w_j[p] \geq v_J[p] \geq v_J - p_J\, q \geq v_J - (\ell - 1)\, q > q. \qquad \square$$

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 2.2. Aquí estem considerant $y_J = \sum_{A_k \supseteq J} v_k$ i el conjunt $J^* = \bigcup_{A_k \supseteq J} A_k$. Un element de J^* no està contingut necessàriament en tots aquests conjunts A_k. Tanmateix, quan $i_*[s] \in J^*$, les equacions (2) i (4) encara permeten deduir la desigualtat

$$y_J[s+1] = \sum_{\substack{A_k \supseteq J \\ k \surd i_*}} v_k[s+1] + \sum_{\substack{A_k \supseteq J \\ k \not\surd i_*}} v_k[s+1] =$$

$$= \left(1 - \frac{q}{w_*[s]}\right) \sum_{\substack{A_k \supseteq J \\ k \surd i_*}} v_k[s] + \sum_{\substack{A_k \supseteq J \\ k \not\surd i_*}} v_k[s] \geq y_J[s] - q,$$

on hem usat el fet que $w_*[s] = w_{i_*}[s] \geq \sum_{k \surd i_*, A_k \supseteq J} v_k[s]$. D'altra banda, quan $i_*[s] \notin J^*$, l'equació (4) garanteix que $y_J[s+1] = y_J[s]$. Per tant,

$$y_J[p] \geq y_J - p_{J^*}\, q.$$

Anàlogament a la demostració del teorema 2.1, aquesta desigualtat, combinada amb les hipòtesis $v_J > \ell\, q$ i $p_{J^*} \leq \ell - 1$, aquesta última essent la negació de la conclusió, contradiu la definició de p, ja que podem escriure la cadena de desigualtats següent, on j representa qualsevol element de J que segueix essent elegible després del pas p (tal element existeix per la hipòtesi $\ell \leq m_J$):

$$w_*[p] \geq w_j[p] \geq y_J[p] \geq y_J - p_{J^*}\, q \geq y_J - (\ell - 1)\, q > q. \qquad \square$$

Observació 2.1. Utilitzant (8) en lloc de (9), es pot tractar de manera similar la hipòtesi més feble $v_J \geq \ell\, q$, resp. $y_J \geq \ell\, q$, per a demostrar que la desigualtat $n_J \geq \ell$, resp. $n_{J^*} \geq \ell$, només pot fallar en certs casos singulars que permeten diverses assignacions diferents (de l'estil que hem vist al final de la proposició 1.2). Fins i tot llavors, algunes d'aquestes assignacions compleixen la igualtat $n_J = \ell$, resp. $n_{J^*} = \ell$.

Observació 2.2. En particular, en el cas de dos partits amb uns nombres de vots iguals respectivament a $\ell\, q$ i $(n+1-\ell)\, q$, cal admetre la possibilitat que el primer partit no arribi a obtenir ℓ representants (o el segon no arribi a obtenir-ne $n+1-\ell$). Per tant, tenint en compte que $q = v/(n+1)$, el mètode d'Eneström i Phragmén compleix $\sup\{v_J/v \mid n_J < \ell\} = \sup\{y_J/v \mid n_{J^*} < \ell\} = \ell/(n+1)$, on sup es refereix al que pot passar en una elecció arbitrària. En la notació de Janson [16] $\pi_{\mathsf{same}}(\ell, n) = \pi_{\mathsf{PJR}}(\ell, n) = \ell/(n+1)$.

Corol·lari 2.1 (Manteniment de la majoria). *Si n és senar (resp. parell), $m_J \geq (n+1)/2$ (resp. $m_J \geq n/2$) i $v_J > v/2$ (resp. $v_J \geq v/2$), llavors $n_J > n/2$ (resp. $n_J \geq n/2$). Anàlogament passa amb y_J i n_{J^*} en lloc de v_J i n_J.*

Demostració. Basta notar que la hipòtesi $v_J > v/2$ (resp. $v_J \geq v/2$) implica $v_J > \ell\, q$ amb $\ell = (n+1)/2 > n/2$ (resp. $\ell = n/2$). $\square$

Observació 2.3. Aquesta propietat pot fallar quan s'usa la quota de Hare en lloc de la de Droop. Per exemple [18, p. 171] suposem que es tracta de repartir 7 escons entre tres llistes A, B_1 i B_2 que obtenen, respectivament, 900, 480 i 400 vots. La quota de Hare és $1780/7 = 254.3$ i els quocients respectius són 3.539, 1.888 i 1.573, de manera que la regla de les restes majors acaba donant, respectivament, 3, 2 i 2 escons, sense majoria absoluta d'escons per a A, tot i que tenia majoria absoluta de vots. És més, les llistes B_1 i B_2 podrien correspondre a un mateix partit, que així aconsegueix un escó més que amb una sola llista B i 880 vots.

A finals del segle XIX això va portar diverses institucions suïsses a adoptar el mètode de les restes majors amb la quota de Droop i Hagenbach-Bischoff (vegeu [18, p. 171, 197, 276] i [19, apartat 3.2]).

Observació 2.4. A canvi de la propietat precedent, no es pot evitar la possibilitat de tenir $v_J < v/2$, però $n_J > n/2$. Per exemple, per a $n = 5$ els vots 56 A, 34 B, 30 C donen com a resultat els escons 3 A, 1 B, 1 C, on A té menys de la meitat dels vots però més de la meitat dels escons.

Observació 2.5. Per al mètode d'optimització global de Thiele (vegeu l'apartat 5.2) s'ha demostrat que en les condicions del teorema 2.2 està garantida la propietat addicional següent [16, teorema 7.6]: Existeix un tipus k d'electors tal que $A_k \supseteq J$ i A_k conté almenys ℓ candidats elegits. Aquesta propietat no la compleix el mètode minimax iteratiu de Phragmén [16, exemple 7.4]. Ni tampoc no la compleix el mètode que estudiem aquí. Un contraexemple és el següent:

$$21\, a\, b\, c_1, \quad 21\, a\, b\, c_2, \quad 22\, c_1\, c_2\, c_3, \quad 1\, c_1\, c_3, \quad 15\, c_3, \quad n = 3.$$

Els escons són assignats a c_1, c_2 i c_3, en aquest ordre. Com es pot veure, la propietat esmentada falla per al conjunt $J = \{a, b\}$, per al qual $y_J = 42 > 2q$.

Observació 2.6. La variant 1.3.1 no compleix el teorema 2.1. Un contraexemple és el següent:

$$95\, A, \quad 79\, B, \quad 75\, C, \quad 7\, AB, \quad 56\, AC, \quad n = 3.$$

Com es pot comprovar, amb la variant esmentada el partit B no obté cap escó tot i que té més d'una quota.

Observació 2.7. L'exemple següent, tret de [31, p. 14], mostra que el teorema 2.2 no es compleix si en lloc de la hipòtesi $\ell \le m_J$ es considera $\ell \le m_{J^*}$:

$$120\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5, \quad 86\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4, \quad 24\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5, \quad n = 7.$$

La quota és $q = 230/8 = 28.75$. Els escons són assignats a a_2, a_3, a_4, b_1, a_5, b_2 i b_3, en aquest ordre. Per a $J = \{a_2, a_3, a_4, a_5\}$ es té $J^* = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ i $y_J = 144 > 5\,q$. Tanmateix, $n_{J^*} = 4 < 5$.

3 Diferents tipus de monotonia, o la seva manca

Les propietats de monotonia consideren l'efecte de modificar alguns vots a favor d'un candidat determinat i demanen que aquest candidat no sigui perjudicat en el resultat.

3.1 Monotonia per a candidats individuals

TEOREMA 3.1. *Considerem una elecció amb candidats individuals i una modificació dels vots que consisteix només a afegir aprovacions a favor d'un candidat determinat, sense cap variació en les aprovacions que reben els altres candidats ni en el nombre total de vots ni en el nombre de representants a elegir. Si abans de la modificació s'assignava un escó a aquest candidat, llavors també se li assignarà un escó després de la modificació.*

DEMOSTRACIÓ. A continuació utilitzem una titlla per a referir-nos a les quantitats que corresponen a després de la modificació dels vots. Sigui i el candidat que obté aprovacions addicionals. Així doncs, $\tilde{w}_i > w_i$, mentre que $\tilde{w}_j = w_j$ per a qualsevol $j \neq i$. Suposem que per als vots originals i és elegit quan s pren el valor t. Considerem ara els vots modificats. Afirmem que i és elegit per a algun $s \leq t$. Això és obvi en el cas $t = 0$, de manera que a partir d'ara considerarem $t \geq 1$. Suposem que no és elegit per a cap $s \leq t - 1$ i vegem que llavors és elegit per a $s = t$. En efecte, la hipòtesi que estem fent implica, per inducció, els fets següents per a $s \leq t$: $\tilde{w}_i[s] \geq w_i[s]$; $\tilde{w}_j[s] = w_j[s]$ per a qualsevol $j \in I[s] \setminus \{i\}$; els candidats elegits són els mateixos que amb els vots originals. Això dona el resultat desitjat, ja que $\tilde{w}_i[t] \geq w_i[t] \geq w_j[t] = \tilde{w}_j[t]$ per a qualsevol $j \in I[t] \setminus \{i\}$. □

OBSERVACIÓ 3.1. No es pot prescindir de la hipòtesi que el nombre de vots es manté constant. Si les noves aprovacions eren abans vots buits i aquests no eren comptats en el nombre total de vots, llavors el candidat en qüestió pot deixar de ser elegit a causa de l'augment que experimenta la quota. Per exemple, l'elecció de tres representants amb els vots

$$8\,b,\quad 7\,a\,b,\quad 4\,c,\quad 9\,b\,c,\quad 9\,a\,d,\quad 1\,b\,d,\quad 3\,a\,c\,d,\quad 8\,b\,c\,d$$

dona els tres escons successivament a b, c, a. I amb un vot addicional que aprova només a, llavors resulten elegits successivament b, d, c.

OBSERVACIÓ 3.2. En el cas d'empats pot passar que tant els vots originals com els modificats admetin una assignació en què el candidat en qüestió és elegit i una altra en què no. En aquest cas, depenent de quina assignació és escollida abans i després de la modificació, pot fer la sensació errònia d'una manca de monotonia.

OBSERVACIÓ 3.3. El teorema 3.1 no val per a la variant 1.3.6, que permet que el nombre de vots arribi a prendre valors negatius. Un exemple el dona l'elecció de dos representants amb els vots següents:

$$7\,a,\quad 3\,b,\quad 2\,c,\quad 1\,d_i\quad (i = 1\ldots 18).$$

La quota és $q = 10$. Com es pot comprovar, la variant 1.3.6 determina l'elecció de a i b. Tanmateix, si tres dels vots que només aproven a passen a aprovar també b, llavors resulten elegits a i c.

3.2 Manca de monotonia per a candidatures col·lectives

Considerem ara la situació anàloga en què els candidats són llistes de partit en lloc de candidats individuals. Suposem que hi ha una llista que és afegida en alguns vots que abans no la incloïen (mentre que les altres llistes mantenen exactament les mateixes aprovacions que abans). En aquesta situació s'esperaria que el partit en qüestió mantingués almenys el mateix nombre d'escons. Però no sempre és així.

Considerem, per exemple, el cas següent:

$$5\,A, \quad 4\,B, \quad 6\,AC, \quad 4\,BC, \quad n = 3.$$

Com es pot comprovar, el procediment d'Eneström-Phragmén assigna els escons successivament a A, B i A. Però si un dels vots que ara aproven només B es modifica i aprova també A, llavors els escons són assignats successivament a A, C i B.

L'exemple següent il·lustra un fenomen del mateix tipus que en l'observació 3.1 de més amunt (on canvia el nombre de vots, i, per tant, la quota):

$$5\,A, \quad 3\,B, \quad 3\,AB, \quad 8\,AC, \quad 7\,BC, \quad n = 3.$$

Com es pot comprovar, els escons són assignats successivament a A, B i A. Suposem ara que els vots que només aproven A augmenten en una unitat. Després d'aquesta modificació, els escons són assignats successivament a A, C i B.

Aquests fenòmens poden ser justificats argumentant que el procediment d'Eneström i Phragmén només busca que el conjunt de representants estigui ben repartit entre els electors. Com que els vots només expressen aprovació, no importa si un elector és representat per un candidat o per un altre, sempre que ambdós candidats tinguin l'aprovació d'aquell elector.

3.3 Manca de monotonia respecte a la mida de la cambra

D'altra banda, el procediment està adreçat a un valor concret del nombre total d'escons, el qual determina la quota. No és cap sorpresa, doncs, que el pas de n a $n+1$ escons no sempre consisteixi simplement en afegir un candidat. Així, l'exemple 1.1 amb $n = 3$ dona com a resultat l'elecció successiva de a, u i x. En canvi, els mateixos vots amb $n = 4$ donen com a resultat l'elecció successiva de a, u, b i z.

4 Comportament asimptòtic quan $n \to \infty$ en el cas de dos partits

En aquesta secció suposem que només hi ha dos partits, A i B —per tant, cada elector aprova o bé A o bé B o tots dos partits— i ens preguntem pel comportament asimptòtic de n_A/n i n_B/n quan $n \to \infty$ i la seva dependència respecte al nombre de vots de cada tipus, v_A, v_B, v_{AB}. Com que els electors que aproven tant A com B són indiferents entre totes les proporcions d'escons entre A i B, el comportament ideal és reproduir la proporció entre v_A i v_B, és a dir, tenir $\lim_{n\to\infty} n_A/n = v_A/(v_A + v_B)$.

Mora i Oliver ([22]) van observar que el mètode minimax iteratiu de Phragmén es desvia d'aquest comportament ideal. De fet, la dependència de $\lim_{n\to\infty} n_A/n$ respecte a v_A, v_B, v_{AB} té un caràcter similar a la funció de Cantor. Aquest fenomen ha estat analitzat matemàticament per Janson i Öberg [17]. En aquesta secció veurem que el mètode d'Eneström i Phragmén es comporta millor.

Usarem la notació següent:

$$\alpha[s] = v_A[s]/v, \quad \beta[s] = v_B[s]/v, \quad \zeta[s] = v_{AB}[s]/v;$$
$$\rho = q/v = 1/(n+1).$$

Per a $\alpha[0] = \beta[0] = 0$ es veu fàcilment que el procediment permet qualsevol distribució d'escons entre A i B. Per a $\alpha[0] = 0 < \beta[0]$ —resp. $\beta[0] = 0 < \alpha[0]$— també es veu fàcilment que tots els escons es donen a B —resp. A. *Per tant, a partir d'ara suposarem* $\alpha[0], \beta[0] > 0$. Pel que fa a $\zeta[0]$, de vegades tractarem separadament els casos $\zeta[0] > 0$ i $\zeta[0] = 0$ (aquest últim ha estat considerat a l'apartat 1.4).

En comptes de $\alpha[s]$, $\alpha[s+1]$, $\alpha[s+2]$, a continuació escriurem α, α', α'', i similarment amb β i ζ. Com mostra el lema següent, sempre som en el cas $w_*[s] > q$ i, per tant, les assignacions d'escons gasten sempre una quota sencera. Més concretament, per a $s \le n-1$ els valors de $(\alpha', \beta', \gamma')$ romanen positius i estan relacionats amb (α, β, γ) de la manera següent:

$$\begin{cases} \alpha' = \left(1 - \dfrac{\rho}{\alpha+\zeta}\right)\alpha, \quad \beta' = \beta, \quad \zeta' = \left(1 - \dfrac{\rho}{\alpha+\zeta}\right)\zeta, \quad \text{si } \alpha > \beta; \\[2ex] \alpha' = \alpha, \quad \beta' = \left(1 - \dfrac{\rho}{\beta+\zeta}\right)\beta, \quad \zeta' = \left(1 - \dfrac{\rho}{\beta+\zeta}\right)\zeta, \quad \text{si } \alpha < \beta. \end{cases} \tag{10}$$

En el primer cas, l'escó ha estat assignat a A i en el segon a B. Per a $\alpha = \beta$ es permeten les dues possibilitats.

LEMA 4.1. *Suposem que* $\zeta[0] > 0$. *Llavors es compleixen els fets següents:*

$$\max(\alpha+\zeta, \beta+\zeta) > \rho \qquad \forall s \le n-1, \tag{11}$$
$$(\alpha', \beta', \gamma') \textit{ estan relacionades amb } (\alpha, \beta, \gamma) \textit{ per } (10) \qquad \forall s \le n-1, \tag{12}$$
$$\alpha + \beta + \zeta = 1 - s\,\rho = (n+1-s)\rho \qquad \forall s \le n, \tag{13}$$
$$\alpha, \beta, \zeta > 0 \qquad \forall s \le n. \tag{14}$$

DEMOSTRACIÓ. Per a $s = 0$, (13) es compleix per la definició de α, β, ζ, i la desigualtat (14) és certa per hipòtesi. Encara per a $s = 0$, (11) es compleix perquè altrament tindríem $\alpha + \zeta \le \rho$ i $\beta + \zeta \le \rho$, d'on es deduïria que $\alpha + \beta + \zeta < \alpha + \beta + 2\zeta \le 2\rho$, és a dir, $(n+1)\rho < 2\rho$, i, per tant, $n < 1$.

D'altra banda, per a qualsevol s es comprova fàcilment que (11) implica (10) i que els valors resultants de $(\alpha', \beta', \gamma')$ satisfan (13) (amb s substituïda per $s+1$) i (14).

Per tant, només resta demostrar que (11) es manté vàlida per a $s \le n-1$. Sigui s l'última vegada que es compleix (11) i suposem que fos $s \le n-2$. Tal com acabem de veure en el paràgraf precedent, això implica $\alpha' + \beta' + \zeta' = (n-s)\rho$ i $\alpha', \beta', \zeta' > 0$. Però estem suposant que $\max(\alpha' + \zeta', \beta' + \zeta') \le \rho$. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar també que $\max(\alpha' + \zeta', \beta' + \zeta') = \alpha' + \zeta'$. Combinant aquests fets amb el valor conegut $\alpha' + \beta' + \zeta' = (n-s)\rho$, s'obté que $\beta' = (n-s)\rho - (\alpha' + \zeta') \ge (n-s-1)\rho \ge \rho$, on hem utilitzat la hipòtesi que $s \le n-2$. Tenint en compte que $\zeta' > 0$, se segueix que $\beta' + \zeta' > \rho$, en contradicció amb la hipòtesi anterior $\max(\alpha' + \zeta', \beta' + \zeta') \le \rho$. □

LEMA 4.2. *Suposem que $\zeta[0] > 0$. Si l'escó $s+1$ s'assigna a A i l'escó $s+2$ s'assigna a B, aleshores l'escó $s+3$ s'assigna necessàriament a A (sempre que $s+3 \le n$). Anàlogament si intercanviem A i B.*

DEMOSTRACIÓ. Assignar l'escó $s+1$ a A i l'escó $s+2$ a B implica les igualtats

$$\alpha' = \left(1 - \frac{\rho}{\alpha + \zeta}\right)\alpha, \quad \beta' = \beta, \qquad \zeta' = \left(1 - \frac{\rho}{\alpha + \zeta}\right)\zeta;$$

$$\alpha'' = \alpha', \qquad \beta'' = \left(1 - \frac{\rho}{\beta' + \zeta'}\right)\beta', \quad \zeta'' = \left(1 - \frac{\rho}{\beta' + \zeta'}\right)\zeta',$$

i també les desigualtats $\alpha/\beta \ge 1$ (i $\alpha'/\beta' \le 1$). Haurem acabat si demostrem que $\alpha''/\beta'' > \alpha/\beta$ (que implica $\alpha''/\beta'' > 1$). Com que

$$\frac{\alpha''}{\beta''} = \frac{1}{(1 - \rho/(\beta' + \zeta'))}\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{(1 - \rho/(\alpha + \zeta))}{(1 - \rho/(\beta' + \zeta'))}\frac{\alpha}{\beta},$$

n'hi ha prou amb veure que $\dfrac{(1 - \rho/(\alpha + \zeta))}{(1 - \rho/(\beta' + \zeta'))} > 1$. Però això equival a la desigualtat

$$\beta' + \zeta' < \alpha + \zeta,$$

és a dir,

$$\beta + \left(1 - \frac{\rho}{\alpha + \zeta}\right)\zeta < \alpha + \zeta,$$

la qual cosa es compleix perquè $\beta \le \alpha$ i $\zeta > 0$ (per (14)). □

Observació 4.1. Els càlculs precedents mostren que si $\alpha/\beta = 1$ i l'escó $s+1$ és assignat a A, llavors $\alpha'/\beta' = (1 - \rho/(\alpha + \zeta))\,\alpha/\beta < 1$ i l'escó $s + 2$ és assignat necessàriament a B (suposant que $s + 2 \le n$). A més, $\alpha''/\beta'' > \alpha/\beta = 1$ i l'escó $s+3$ és assignat necessàriament a A (suposant que $s+3 \le n$). Continuant amb el mateix argument, $\alpha'''/\beta''' < 1$, $\alpha''''/\beta'''' > 1$, etcètera. Així doncs, en el cas $\zeta[0] > 0$ un empat de la forma $\alpha/\beta = 1$ només pot ocórrer una sola vegada.

Lema 4.3. *Suposem que $\zeta[0] = 0$ i que l'escó $s + 1$ és objecte d'un empat, és a dir, $\alpha = \beta$. Si aquest escó és assignat a A, llavors l'escó $s + 2$ és assignat a B (suposant que $s + 2 \le n$) i l'escó $s + 3$ torna a ser objecte d'un empat (suposant que $s + 3 \le n$). Anàlogament si intercanviem A i B.*

Demostració. N'hi ha prou amb comprovar que $\alpha'/\beta' = (\alpha - \rho)/\beta < 1$ i que $\alpha''/\beta'' = (\alpha-\rho)/(\beta-\rho) = 1$. L'únic problema podria ser que tinguéssim $\alpha = \rho$ i $\beta = \rho$, però això implica que tots els escons anteriors s'han donat a canvi d'una quota sencera ρ; tenint en compte que $(n + 1)\rho = 1$ i que $\alpha + \beta = 2\rho$, se'n dedueix que en aquest moment ja hem assignat $n - 1$ escons, de manera que l'escó $s + 1$ és l'últim. □

Tant en el cas $\zeta[0] > 0$ com en el cas $\zeta[0] = 0$ els fets precedents tenen la conseqüència següent:

Proposició 4.1. *Sigui k el màxim enter no negatiu tal que els k primers escons són assignats tots ells al mateix partit sense empats (si $\alpha = \beta$, llavors $k = 0$). Aleshores, els $n - k$ escons restants es reparteixen o bé per igual, o bé amb un escó de diferència entre els dos partits.*

El nostre objectiu és ara calcular els límits de n_A/n i n_B/n quan $n \to \infty$. El resultat serà el següent:

Proposició 4.2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\zeta)}{\alpha}\right), \quad \textit{per a } \alpha \ge \beta, \tag{15}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(\beta-\alpha)(\beta+\zeta)}{\beta}\right), \quad \textit{per a } \alpha \le \beta. \tag{16}$$

Demostració. El càlcul d'aquests límits passarà per estimar el valor de l'enter k que es defineix en la proposició 4.1. A continuació suposarem que el primer escó és assignat a A.

En la resta d'aquesta secció tornem a utilitzar la notació $\alpha[s]$, $\beta[s]$, $\zeta[s]$ per a significar els valors en el pas s, i α, β, ζ tornen a significar els valors inicials (que compleixen $\alpha + \beta + \zeta = 1$). La hipòtesi que el primer escó és assignat a A implica que $\alpha \ge \beta$.

D'acord amb la seva definició, k és el primer enter tal que $\alpha[k] \le \beta[k]$. El seu valor es pot calcular de la manera següent. Per començar, del fet que els primers k escons siguin assignats tots ells a A se'n dedueix que

$$\alpha[k] + \zeta[k] = \alpha + \zeta - k\,\rho. \tag{17}$$

Cadascun d'aquests escons ha comportat un factor de reducció que afecta tant els vots que només aproven A com els que aproven ambdós partits. D'això se'n dedueix que

$$\frac{\alpha[k]}{\alpha} = \frac{\alpha[k] + \zeta[k]}{\alpha + \zeta}. \tag{18}$$

Combinant (17) i (18) s'obté que

$$\alpha[k] = \left(1 - \frac{k\,\rho}{\alpha + \zeta}\right)\alpha.$$

D'altra banda, sabem que $\beta[k] = \beta$. Aquestes igualtats permeten determinar el primer enter k que compleix $\alpha[k] \le \beta[k]$, a saber,

$$k = \left\lceil \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \zeta)}{\alpha\,\rho} \right\rceil,$$

on $\lceil x \rceil$ significa el més petit dels enters superiors o iguals a x. Com que $\rho = 1/(n+1)$, obtenim que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \zeta)}{\alpha}.$$

Finalment, només resta tenir en compte que k està relacionat amb n_A de la manera següent: $n_A = k + (n-k)/2$ per a $n - k$ parell, $n_A = k + (n - k \pm 1)/2$ per a $n - k$ senar (el signe «+» es dona en el cas d'empats). D'aquests fets se'n dedueix (15). La restricció $\alpha \ge \beta$ que apareix a (15) correspon a la hipòtesi de més amunt que els primers escons van a parar a A. En el cas contrari, la fórmula anàloga per a $\lim_{n\to\infty}(n_B/n)$ porta a (16). □

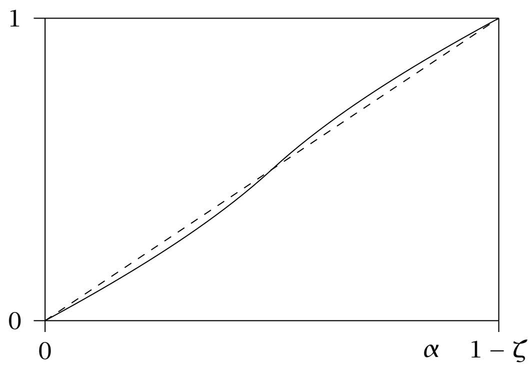


FIGURA 2: Dependència de $\lim_{n\to\infty}(n_A/n)$ respecte a α per a $\zeta = 0.376$.

En particular, (15) i (16) coincideixen a donar $\lim_{n\to\infty}(n_A/n) = 1/2$ per a $\alpha = \beta$. D'altra banda, per a $\zeta = 0$ ambdues fórmules es redueixen a $\lim_{n\to\infty}(n_A/n) = \alpha$ (ja que $\alpha + \beta = 1$).

La figura 2 mostra la dependència del límit respecte α per a un valor fixat de ζ (aleshores $\beta = 1 - \zeta - \alpha$).

5 Comparació amb altres mètodes

En aquesta secció les propietats precedents del mètode d'Eneström i Phragmén són comparades amb les dels principals mètodes alternatius per a eleccions parlamentàries mitjançant el vot d'aprovació. En particular, considerarem tant el mètode minimax iteratiu de Phragmén [25, 26, 27, 29] com els mètodes de Thiele [38], els quals són tots ells extensions de la regla de D'Hondt al cas de llistes obertes. També ens referirem a l'anomenat *mètode de parts iguals* [23], el qual té certs punts en comú amb el d'Eneström i Phragmén, però en realitat és prou diferent. Finalment, tot i que no utilitza el vot d'aprovació sinó el vot preferencial, considerarem també el mètode de Borda harmònic, que en el seu moment Finlàndia va preferir al mètode d'Eneström i Phragmén.

5.1 El mètode minimax de Phragmén

El mètode minimax de Phragmén considera que cada representant, és a dir, cada candidat electe, es reparteix entre els «seus» electors, és a dir, els que l'han aprovat. Idealment es tractaria que aquest repartiment, no necessàriament uniforme, minimitzés la desigualtat entre electors pel que fa al total de representació obtinguda per cadascun d'ells. Més concretament, aquí Phragmén pretenia minimitzar la màxima representació obtinguda per un elector. En el cas general de les llistes obertes, aquesta optimització no és fàcil de calcular. És per aquest motiu que, en lloc d'això, Phragmén va proposar un procediment seqüencial «voraç» en què a cada pas es busca un representant addicional que minimitzi aquesta representació màxima.

Aquest criteri de mínima desigualtat de representació entre electors està relacionat amb la noció de representació proporcional. Encara que no parteix de cap quota, resulta que el mètode minimax iteratiu de Phragmén satisfà també els teoremes 2.1 i 2.2 amb $q = v/(n+1)$. Dit de manera equivalent, assoleix els valors òptims dels índexs π_{same} i π_{PJR} de [16, apartat 7.2] (vegeu també [14, sats 13.5.(ii)]).

Pel que fa a la monotonia, el mètode minimax iteratiu de Phragmén es comporta com el d'Eneström i Phragmén: la monotonia per a candidats individuals es manté [22, proposició 7.10] i la monotonia per a llistes de partit falla [22, apartat 7.5]. La monotonia respecte a la mida del parlament és certament una altra qüestió, ja que el mètode minimax iteratiu de Phragmén compleix aquesta propietat per construcció.

D'altra banda, pel que fa al comportament asimptòtic en el cas de dos partits, el mètode minimax iteratiu de Phragmén presenta un comportament especial en què, per exemple, la corba suau de la figura 2 se substitueix per una funció similar a la de Cantor en què cada valor racional és la imatge d'un interval de mesura positiva (vegeu [22, apartat 7.7] i [17, apartat 11.4]). A més del caràcter singular, el mètode minimax iteratiu també és pitjor que el d'Eneström-Phragmén en la magnitud de les desviacions respecte al comportament ideal (vegeu la figura 3 de [22]).

5.2 Els mètodes de Thiele

Els mètodes de Thiele ([38]) pretenen maximitzar la satisfacció total dels electors. En relació amb això, es postula que la satisfacció σ d'un elector només depèn del nombre h de candidats electes que han estat aprovats per aquest elector; aquesta dependència se suposa no decreixent amb $\sigma(0) = 0$ i $\sigma(1) = 1$.

Més concretament, Thiele va prestar atenció especial al cas en què aquesta dependència té la forma següent:

$$\sigma(h) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{h}, \quad \text{amb } \sigma(0) = 0.$$

Com es pot veure fàcilment, aquesta funció té la propietat que, en el cas de les llistes de partit, el criteri de maximització de la satisfacció total condueix a la regla de D'Hondt.

Com a l'apartat 5.1, la complexitat computacional del cas general de les llistes obertes va portar Thiele a substituir el criteri d'optimització original per certes versions seqüencials voraces, que es coneixen, respectivament, com a *mètodes d'addició i d'eliminació de Thiele*.

5.2.1 Mètode d'addició de Thiele. En aquest cas es comença amb el conjunt buit i cada pas busca un representant addicional que produeixi un increment màxim de satisfacció.

Si el comparem amb el mètode d'Eneström i Phragmén, convé assenyalar que el mètode d'addició de Thiele també es pot veure en termes d'una reducció progressiva del valor de cada vot cada vegada que s'utilitza per a triar un nou candidat. De fet, suposa l'esquema de reducció següent: una papereta es redueix a $1/2$ del seu valor quan s'utilitza per primera vegada per a elegir un dels seus candidats. Quan s'escull un segon candidat d'una papereta, el valor d'aquesta papereta es redueix a $1/3$ del seu valor inicial, o equivalentment, a $2/3$ del seu valor anterior. De la mateixa manera, quan s'escull un tercer candidat d'una papereta, el valor d'aquesta papereta es redueix a $1/4$ del seu valor inicial, o equivalentment, a $3/4$ del seu valor anterior. I així successivament.

Això té una certa similitud amb el mètode que hem estat discutint, especialment la seva variació de «fraccions simples» (apartat 1.3.1). Tanmateix, els factors de reducció del mètode de Thiele no tenen res a veure amb el nombre de paperetes que van donar suport al candidat elegit, i molt menys amb comparar aquest nombre amb qualsevol quota prefixada. Per tant, aquesta semblança és només superficial. En paraules de Phragmén [30, p. 4], la regla d'addició de Thiele «és una generalització purament formal de la regla de D'Hondt i, per tant, no té una justificació genuïna».

En particular, les propietats de proporcionalitat com els teoremes 2.1 i 2.2 deixen de tenir lloc quan els vots s'allunyen del cas de llistes de partits disjunts. Considerem, per exemple, el cas següent, degut a [37]:

$$1\,a, \quad 9\,a\,b, \quad 9\,a\,c, \quad 9\,b, \quad 9\,c, \quad 13\,k\,l\,m, \tag{19}$$

el qual compararem amb

$$37\,a\,b\,c, \quad 13\,k\,l\,m. \tag{20}$$

Suposem que $n = 3$. La quota és $q = 50/4 = 12.5$. Així doncs, les hipòtesis del teorema 2.1 es compleixen amb $J = \{k, l, m\}$ i $\ell = 1$. Si aquest teorema fos cert, hauríem de tenir $n_J \geq 1$. Això es compleix en el cas de (20), on a, b i k resulten elegits en aquest ordre (com en la regla de D'Hondt). Tanmateix, en el cas de (19), el mètode d'addició de Thiele elegeix successivament a, b i c (mentre que el mètode d'Eneström i Phragmén elegeix successivament a, k i b). Vist això, podem imaginar que (20) són vots sincers i que (19) és una estratègia que permet al partit $a\,b\,c$ aconseguir els tres escons. En el marc de [16], el fet que el mètode d'addició de Thiele no compleix els teoremes 2.1 i 2.2 es tradueix en el fet que els seus valors de $\pi_{\mathsf{same}}(\ell, n)$ i $\pi_{\mathsf{PJR}}(\ell, n)$ són superiors al valor òptim $\ell/(n+1)$ (vegeu [16, apartat 7.4]).

Pel que fa a la monotonia, el mètode d'addició de Thiele es comporta exactament com el minimax iteratiu de Phragmén: la monotonia per a candidats individuals es manté [15, teorema 14.2], la monotonia de les llistes de partit falla i la monotonia respecte a la mida del parlament es manté per construcció.

Finalment, pel que fa al comportament asimptòtic en el cas de dos partits, el mètode d'addició de Thiele compleix el límit ideal $\lim_{n\to\infty} n_A/n = \alpha/(\alpha+\beta) = \alpha/(1-\zeta)$ [17, exemple 12.10].

5.2.2 Mètode d'eliminació de Thiele.

A diferència del procediment d'addició, aquí es comença amb el conjunt de tots els candidats i cada pas busca quin d'ells s'ha d'eliminar per a obtenir un mínim decrement de satisfacció.

Aquest procediment compleix el teorema 2.1 però no el 2.2 [16, apartat 7.5]. En el cas particular de (19), resulten eliminats successivament m, l i a, de manera que romanen elegits b, c i k (per cert, aquest conjunt optimitza també el criteri de Thiele de manera global, no només seqüencial). Aquest resultat concorda amb el teorema 2.1, que concedeix un escó al conjunt $J = \{k, l, m\}$. Tanmateix, també és cert que aquest conjunt de candidats electes no inclou el més votat, és a dir, a. Aquest fet es pot veure com un defecte important d'aquest mètode (punt de vista que va ser adoptat per Phragmén [29, p. 301–302]). Un altre defecte d'aquest procediment és que incompleix fins i tot la propietat de la monotonia per als candidats individuals.

També cal notar que els experiments computacionals sobre el comportament asimptòtic en el cas de dos partits indiquen que el mètode d'eliminació de Thiele compleix el comportament límit ideal $\lim_{n\to\infty} n_A/n = \alpha/(\alpha+\beta) = \alpha/(1-\zeta)$.

De totes maneres, el procediment d'eliminació no és gaire adequat en el cas que els elements que s'aproven o no siguin partits. En efecte, en aquest cas, aquest procediment ha de començar per tenir en compte quants candidats s'inclouen en una llista de partit, quan aquesta xifra hauria de ser irrellevant.

5.3 El mètode de parts iguals

Recentment s'ha proposat [23] (vegeu també [20]) un nou mètode que té bastants punts en comú amb el mètode d'Eneström i Phragmén. Els seus autors l'anomenen *mètode de parts iguals* (*equal shares* en anglès; inicialment en deien *rule X*).

Tal com el mètode d'Eneström-Phragmén, el de parts iguals és un procediment seqüencial en què cada representant és elegit a canvi d'un cert nombre de vots i els vots van essent descomptats a mesura que s'utilitzen. Com a Eneström-Phragmén, el primer que es fa és fixar la quota, és a dir, el nombre de vots que es bescanviaran per un escó; en relació amb això, la versió original utilitza la quota de Hare, però també seria raonable fer servir la quota de Droop. Encara en comú amb Eneström-Phragmén, no està assegurat que aquest preu pugui ser mantingut per a tots els escons, sinó que en general pot ser necessària una «liquidació» final amb «rebaixes».

A diferència d'Eneström-Phragmén, però, el procediment ideal sense rebaixes no té una generalització òbvia a l'escenari de rebaixes, de manera que o bé s'atura el procediment, sense haver completat el nombre desitjat de representants, o bé se segueix amb un altre mètode (típicament el mètode minimax de Phragmén). Dit això, la diferència principal entre el mètode d'Eneström-Phragmén i el de parts iguals es troba ja en cada pas del procediment ideal sense rebaixes; concretament, radica en la manera de triar un candidat com a representant i de repartir la quota entre els vots que l'aproven: així com el mètode d'Eneström-Phragmén multiplica aquests vots per un mateix factor ≤ 1, el de parts iguals resta una mateixa quantitat a tots els electors que hi arriben (a aquesta quantitat) i deixa a zero els altres.

Més concretament, per a passar del mètode d'Eneström-Phragmén al de parts iguals basta situar-se en l'escenari que k indexa electors individuals en lloc de tipus d'electors (de manera que $v_k[0] = 1$ per a qualsevol k) i fer els dos canvis següents: (a) Redefinir w_i com a $w_i = q/\rho_i$, on ρ_i és la solució de l'equació

$$\sum_{k \surd i} \min(\rho_i, v_k) = q; \tag{21}$$

si $\sum_{k \surd i} v_k < q$, llavors aquesta equació no té solució, i en aquest cas posem $w_i = 0$. I (b) canviar l'equació (2) per

$$v_k[s+1] = v_k[s] - \min(\rho_*, v_k[s]), \tag{22}$$

on $\rho_* = \min_i \rho_i$.

Si a les equacions (21) i (22) canviem $\min(x, y)$ per xy, llavors tenim exactament el mètode d'Eneström i Phragmén.

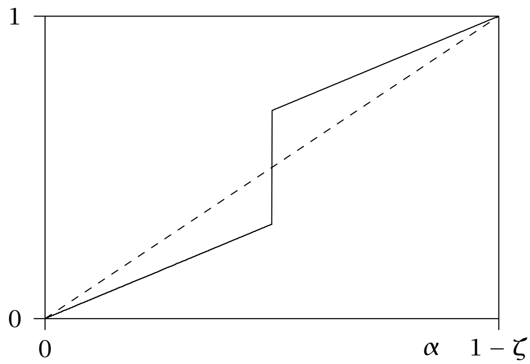


FIGURA 3: Dependència de $\lim_{n\to\infty}(n_A/n)$ respecte a α per a $\zeta = 0.376$ en el mètode de parts iguals. Compareu aquesta figura amb la figura 2.

Les propietats del mètode de parts iguals han estat estudiades a [23] i són discutides a [20] (vegeu-ne les taules 3.1 i 4.1). Aquí només afegirem que el comportament asimptòtic en el cas de dos partits es desvia força del comportament ideal. En efecte, els experiments computacionals mostren que, en lloc del valor $\alpha/(\alpha+\beta)$, $\lim_{n\to\infty} n_A/n$ és igual a α per a $\alpha < (1-\zeta)/2$, mentre que és igual a $1-\beta$ per a $\alpha > (1-\zeta)/2$, amb un salt de mida $\zeta = 1-\alpha-\beta$ quan α travessa el valor $(1-\zeta)/2$ (i β travessa el mateix valor en sentit contrari).

5.4 Taula de comparació

La taula 1 resumeix els resultats anteriors per als mètodes que consideren el vot d'aprovació. A la columna «Tipus» indiquem el comportament en cas de votació uninominal en termes de llistes de partit: «Dr» significa les restes majors amb la quota de Droop, i «D'H» significa la regla de D'Hondt. Les columnes «Tma. 2.1» i «Tma. 2.2» indiquen si aquests teoremes es compleixen o no. A la columna «Mono», el valor «ind» significa que la monotonia s'aplica als candidats individuals, però no a les llistes de partits (vegeu la secció 3), mentre que «×» significa que la monotonia falla fins i tot per a candidats individuals. La columna «2Lim» es refereix al comportament asimptòtic en el cas de dos partits; aquí el valor «$\surd$» significa que el límit és la fracció ideal $\alpha/(\alpha+\beta)$, el valor «×» està motivat pel fenomen de la funció de Cantor en el mètode minimax iteratiu de Phragmén i el valor «$\sim$» significa una funció suau no tan diferent de la ideal. Finalment, la columna «Simpl» intenta categoritzar en dos nivells la simplicitat del mètode per a un públic ampli: «$\sim$» – acceptable, i «×» – una mica complex. En el cas del mètode de parts iguals, ens limitem a les propietats que no depenen del procediment utilitzat en la fase de rebaixes.

	Tipus	Tma. 2.1	Tma. 2.2	Mono	2Lim	Simpl
Eneström-Phragmén	Dr	$\surd$	$\surd$	ind	$\sim$	$\sim$
Phragmén, minimax	D'H	$\surd$	$\surd$	ind	×	×
Thiele, addició	D'H	×	×	ind	$\surd$	$\sim$
Thiele, eliminació	D'H	$\surd$	×	×	$\surd$	×
Parts iguals		$\surd$	$\surd$	ind	×	×

TAULA 1: Comparació de diferents mètodes electorals basats en el vot d'aprovació.

5.5 El mètode de Borda harmònic

Tot i que no utilitza el vot d'aprovació sinó el vot preferencial, a continuació comentem breument el mètode que Finlàndia va adoptar el 1907 en lloc d'altres propostes, una de les quals era el mètode d'Eneström i Phragmén. Aquest mètode consisteix en el següent: cada butlleta compta com 1 vot per al candidat que hi figura en primer lloc, 1/2 vot per al segon, 1/3 per al tercer, etcètera. Per a cada candidat se sumen els vots i fraccions de vot que obté en totes les butlletes. Fet això, s'elegeixen com a representants els candidats que totalitzen més vots comptats d'aquesta manera. En el cas particular de llistes tancades, aquest algorisme equival a la regla de D'Hondt [6]. Tanmateix, la versió general que acabem de descriure per a llistes obertes (ordenades) ja havia estat considerada bastant abans (vegeu [10, p. 21, 54–55], [4], [11, apèndix C] i [9]).[1] Seguint Janson [14, 16], l'anomenem *mètode de Borda harmònic*.

En el cas que ara estem considerant de llistes ordenades és desitjable la propietat següent, similar al teorema 2.1 (vegeu [16]): suposem que hi ha u electors que voten exactament la mateixa llista ordenada; si $u > \ell\, q$ i la llista inclou ℓ candidats o més, llavors resulten elegits almenys ℓ candidats d'aquesta llista. El mètode de Borda harmònic no compleix pas aquesta propietat. Com a exemple poden servir els vots (19), on entenem que l'ordre de preferència entre candidats en cada vot és l'ordre en què apareixen escrits d'esquerra a dreta. Com es pot comprovar, el recompte de Borda harmònic dona com a resultat els nombres de vots següents: a 19, b 13.5, c 13.5, k 13, l 6.5, m 4.33, de manera que els 13 últims electors no obtenen cap representant tot i que superen una quota $q = 12.5$.

De la seva definició se'n dedueix immediatament que aquest mètode gaudeix de la —en principi desitjable— propietat de monotonia: un candidat no pot deixar de ser elegit si és afegit o puja de posició en un o més vots.

Tanmateix, pot ser que llavors deixi de ser elegit un altre candidat que figura més amunt en aquests vots. Per exemple, si $n = 1$ i els vots són 60 a, 40 b, llavors surt elegit a; però si els vots són 60 $a\,b$, 40 b, llavors surt elegit b. Això té l'inconvenient que incita els electors a votar només un candidat, la qual cosa perjudica la proporcionalitat.

D'altra banda, i tal com observava ja Hare [11, p. 188, 305], en general aquest mètode es presta a estratègies que condueixen a resultats artificiosos.

Quant a simplicitat, és certament un mètode prou senzill, però a costa dels efectes indesitjables que estem dient. La qüestió del comportament asimptòtic en el cas de dos partits la deixem de banda, ja que no té sentit per al vot preferencial.

6 Un intent no reeixit de passar a un mètode de divisor

Per a llistes tancades disjuntes, les regles de les restes majors i de D'Hondt estan relacionades entre elles de la manera següent: la de D'Hondt correspon a ajustar la quota de manera que s'assignin exactament n escons sense fer ús de les restes. En el cas que estem considerant de llistes obertes (possiblement no disjuntes), es pot intentar fer el mateix des del procediment d'Eneström i

1 De fet, aquest procediment havia estat utilitzat ja en el segle XVI en l'elecció d'abats als Països Baixos [34, p. 325–326].

Phragmén, és a dir, ajustar la quota de manera que s'assignin exactament n escons, cadascun dels quals a canvi d'una quota, i que cap dels altres candidats no assoleixi una quota. En la nostra notació, i tenint en compte la possibilitat d'empats, això equival a dir que la quota q i el nombre d'escons n han d'estar relacionats de la manera següent:

$$w_*[n-1] \geq q \geq \ w_*[n], \tag{23}$$

on els valors $w_*[s]$ són obtinguts mitjançant l'algorisme de la secció 1, i, per tant, depenen de q.

Observació 6.1. Les desigualtats precedents són anàlogues a les següents per a la regla de D'Hondt (vegeu [33, apartat 4.6]):

$$\min_i v_i/n_i \geq q \geq \max_i v_i/(n_i+1).$$

Malauradament, aquest pla es veu obstaculitzat per diverses dificultats. Per començar, per a un n donat hi pot haver diversos valors de q que satisfan (23) però condueixen a diferents assignacions dels n escons. Per a fer front a aquesta dificultat, es pot pensar a especificar més q, per exemple, exigint que sigui al més gran possible. Tanmateix, aquesta condició no és fàcil de calcular. De fet, pot semblar que es tracta de resoldre l'equació $w_*[n-1] = q$ (on el costat esquerre depèn de q), però de vegades aquesta equació no té cap solució.

Aquestes dificultats es donen, per exemple, en el cas següent, on A, B i C són tres llistes de partit:

$$7\,A, \quad 10\,B, \quad 5\,AB, \quad 17\,C, \quad 13\,AC, \quad 4\,BC. \tag{24}$$

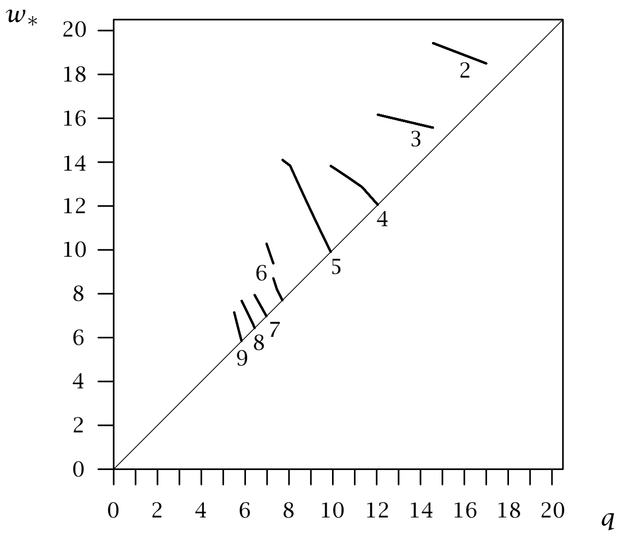


Figura 4: $w_*[n-1]$ en funció de q per a l'exemple (24) i diversos valors de n.

La figura 4 mostra la dependència de $w_*[n-1]$ en funció de q per a $n = 2, \dots, 9$. Com es pot veure, per a $n = 2, 3$ les corbes corresponents no arriben a la diagonal $w_*[n-1] = q$. D'altra banda, per a $n = 6$ la corba corresponent presenta una discontinuïtat que s'associa amb el fet que el resultat canvia de 4 C, 1 A, 1 B a 3 C, 2 A, 1 B.

7 Provisió de substituts

A la pràctica, cal preveure la possibilitat que algun dels candidats elegits deixi d'estar disponible en algun moment i hagi de ser substituït. Per tal de mantenir la representativitat del conjunt de candidats elegits, l'ideal seria que el substitut donés representació als mateixos electors que el candidat que ha deixat d'estar disponible. Per a llistes tancades, la solució és òbvia: basta prendre com a substitut un altre candidat de la mateixa llista. Això val fins i tot quan es permet que l'elector aprovi més d'una llista, sempre que la del candidat a substituir contingui encara algun candidat no elegit (altrament caldrà considerar els vots equivalents en termes de candidats individuals).

En el cas general la solució no és tan fàcil. Per al mètode que s'ha exposat en aquest article és natural procedir de la manera següent: 1. Als vots i fraccions de vot romanents després d'haver assignat els n escons, s'hi reintegren tots els vots i fraccions de vot a canvi dels quals havia estat elegit el candidat que ha deixat d'estar disponible. 2. Fet això, s'executa una vegada més el procediment d'assignació d'un nou escó, amb l'única consideració que aquell candidat no és considerat elegible.

Vegem com faríem això en l'exemple 1.1 de la p. 118. Suposem que deixa d'estar disponible el candidat a. Aquest havia estat elegit en primer lloc, a canvi de 25 vots, concretament els $v_k[0] - v_k[1]$ que s'especifiquen tot seguit, que s'obtenen a partir dels 43 vots en què apareix a aplicant el factor 25/43:

$$12.209\, a\,b\,x, \quad 11.628\, a\,b\,e\,f, \quad 1.163\, a\,e\,u.$$

Per elegir el substitut, reintegrem aquests vots als que havien quedat al final (p. 119); el resultat són els valors següents de $v_k[3] + v_k[0] - v_k[1]$:

$$\begin{array}{llll} 12.209\, a\,b\,x, & 20\, a\,b\,e\,f, & 4.535\, e\,f\,u\,v, & 3.103\, u\,v, \\ 0\, x\,y, & 15\, z, & 1.363\, a\,e\,u. & \end{array}$$

El suport que té ara cada candidat és el següent, on els parèntesis indiquen candidats no elegibles (ja elegits o no disponibles):

$$\begin{array}{lllll} (a\ 33.572), & b\ 32.209, & e\ 25.898, & f\ 24.535, & \\ (u\ 9), & v\ 7.637, & (x\ 12.209), & y\ 0, & z\ 15. \end{array}$$

Dels candidats elegibles, el que té més vots és b, que, per tant, resulta elegit en substitució de a. Això no és cap sorpresa, ja que aquests dos candidats apareixen gairebé sempre junts. Similarment passa amb u i v, de manera que, en el cas de deixar d'estar disponible, u és substituït per v, tal com s'obté en considerar els valors de $v_k[3] + v_k[1] - v_k[2]$. En canvi, x, el candidat elegit en tercer lloc, apareix acompanyat unes vegades per y i altres vegades per b (i a); si apliquem el procediment proposat, hem de considerar $v_k[3] + v_k[2] - v_k[3] = v_k[2]$, amb els valors que estan recollits a la pàgina 119, on es veu que comporten l'elecció de b com a substitut de x.

Observació 7.1. El procediment proposat no és equivalent a fer córrer tot l'algorisme des del principi després d'haver suprimit el candidat que ha deixat d'estar disponible. En efecte, fer això podria comportar variacions en els candidats elegits subsegüentment.

Observació 7.2. Si els candidats que deixen d'estar disponibles són més d'un, llavors tampoc no és el mateix tractar-los successivament en un ordre o altre ni tampoc tractar-los tots alhora. Per tant, a la pràctica caldrà que el reglament especifiqui una d'aquestes diferents alternatives.

Observació 7.3. Phragmén ([30, 31, 32]) proposa un procediment diferent que suposa que cada elector pugui especificar ja els seus «suplents», que s'entendrien com uns candidats addicionals que l'elector encara admetria com a representants seus, però en segona instància. Tanmateix, la nostra proposta de més amunt és conceptualment més clara i té una aplicabilitat més general (per exemple, si deixa d'estar disponible un candidat que ja en substituïa un altre).

Referències

[1] Brams, S. J.; Kilgour, D. M.; Potthoff, R. F. «Multiwinner approval voting: an apportionment approach». *Public Choice*, 178 (2019), 67–93.

[2] Brill, M.; Freeman, R.; Janson, S.; Lackner, M. «Phragmén's voting methods and justified representation». *Math. Program.*, 203 (1-2) (2024), 47–76.

[3] Brill, M.; Laslier, F.; Skowron, P. «Multiwinner approval rules as apportionment methods». *Journal of Theoretical Politics*, 30 (2018), 358–382.

[4] Burnitz, G.; Varrentrapp, G. *Methode, bei jeder Art von Wahlen sowohl der Mehrheit als den Minderheiten die ihrer Stärke entsprechende Zahl von Vertretern zu sichern*. Frankfurt: I. D. Sauerländer, 1863. [Traducció anglesa: «A method of assuring to the minorities as well as to the majority, at all kinds of elections, the number of representatives corresponding to their strength». Apèndix B de Matthias N. Forney, *Political Reform by the Representation of Minorities* (Nova York), 1894, 159–174]

[5] Cassel, K. G. *Proportionella Val · Systematisk framställning*. Estocolm: Isaac Marcus' Boktryckeri-Aktiebolag, 1903.

[6] D'Hondt, V. *Système Pratique et Raisonné de Représentation Proportionnelle*. Brussel·les: C. Muquardt, 1882.

[7] Eneström, G. H. «Om aritmetiska och statistiska metoder för proportionella val». *Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, 53 (1896), 543–570.

[8] Eneström, G. H. Carta a l'editor. *Aftonbladet* (23 febrer 1896).

[9] Gigon, A. «La représentation des minorités». *Journal des économistes*, 3ème série, 33 (1874), 61–73.

[10] Hare, T. *The Machinery of Representation*. 2a ed. Londres: W. Maxwell, 1857.

[11] Hare, T. *The Election of Representatives, Parliamentary and Municipal*. 3a ed. Londres: Longman, 1865.

[12] Hill, I. D. «Party lists and preference voting». *Voting Matters*, 29 (2011), 15–19.

[13] Humphreys, J. H. *Proportional Representation*. Londres: Methuen, 1911.

[14] Janson, S. *Proportionella Valmetoder*. Uppsala: Uppsala Universitet, 2012–2018. [Disponible en línia a: `http://www2.math.uu.se/~svante/papers/sjV6.pdf`]

[15] Janson, S. «Phragmén's and Thiele's election methods». Preprint (2016). [Disponible en línia a: `https://arxiv.org/abs/1611.08826`]

[16] Janson, S. «Thresholds quantifying proportionality criteria for election methods». Preprint (2018). [Disponible en línia a: `https://arxiv.org/abs/1810.06377`]

[17] Janson, S.; Öberg, A. «A piecewise contractive dynamical system and Phragmén's election method». *Bull. Soc. Math. France*, 147 (3) (2019), 395–441.

[18] Klöti, E. «Die Proportionalwahl in der Schweiz. Geschichte, Darstellung und Kritik». *Zeitschrift für Schweizerische Statistik*, 37 (1901), 157–310.

[19] Kopfermann, K. *Mathematische Aspekte der Wahlverfahren*. Mannheim: Bibliographisches Institut, 1991.

[20] Lackner, M.; Skowron, P. *Multi-Winner Voting with Approval Preferences*. Cham: Springer, 2023. (SpringerBriefs Intell. Syst.)

[21] Mittag-Leffler, G. [Skrivelse till Justitiedepartementet, Finland, med redovisning för resultatet aven granskning utav "tvänne förslag till proportionel valmetod" i Finland — inlämnade till departementet av A. Lindstedt och E. Phragmen — som av Mittag-Leffler utförts på uppdrag av Chefen för Justitiedepartementet]. Manuscrit. Estocolm: Kungliga Biblioteket, 1906. (Gösta Mittag-Leffler Papper; L62:55, n. 2)

[22] Mora, X.; Oliver, O. «Eleccions mitjançant el vot d'aprovació. El mètode de Phragmén i algunes variants». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 30 (1) (2015), 57–101.

[23] Peters, D.; Skowron, P. «Proportionality and the limits of welfarism». Preprint (2019). [Disponible en línia a: `https://arxiv.org/abs/1911.11747`]

[24] Phragmén, E. «Om proportionella val». Conferència impartida a l'associació Studenter och Arbetare. Resum: *Stockholms Dagblad* (14 març 1893).

[25] PHRAGMÉN, E. «Sur une méthode nouvelle pour réaliser, dans les élections, la représentation proportionnelle des partis». *Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, 51 (3) (1894), 133–137.

[26] PHRAGMÉN, E. *Proportionella Val · En valteknisk studie. Svenska Spörsmål* 25. Estocolm: Lars Hökerbergs, 1895.

[27] PHRAGMÉN, E. «Sur la théorie des élections multiples». *Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, 53 (1896), 181–191.

[28] PHRAGMÉN, E. Carta a l'editor. *Aftonbladet* (23 febrer 1896).

[29] PHRAGMÉN, E. «Till frågan om en proportionell valmethod». *Statsvetenskaplig Tidskrift*, 2 (1899), 297–308 (n. 2: 88–98).

[30] PHRAGMÉN, E. «Utkast till föreskrifter beträffande val av riksdagsmän i andra kammaren och deras suppleanter». Estocolm: Kungliga Boktryckeriet, 1906.

[31] PHRAGMÉN, E. «Promemoria beträffande en förenklad form af den af undertecknad föreslagna valmetoden». Manuscrit. Estocolm: Kungliga Biblioteket, 1906. (Gösta Mittag-Leffler Papper; L62:55, n. 4)

[32] PHRAGMÉN, E. Incipit: «a§. Val sker efter uppropt». Manuscrit. Estocolm: Kungliga Biblioteket, 1906. (Gösta Mittag-Leffler Papper)

[33] PUKELSHEIM, F. *Proportional Representation. Apportionment Methods and their Applications*. 2a ed. Cham: Springer, 2017.

[34] REUSENS, E.; KUYL, P. D.; DE RIDDER, C. B. «Analectes pour servir a l'Histoire Ecclésiastique de la Belgique». Lovaina: Ch. Peeters; Brussel·les: H. Goemaere, 1868.

[35] SÁNCHEZ-FERNÁNDEZ, L.; ELKIND, E.; LACKNER, M. «Committees providing EJR can be computed efficiently». Preprint (2017). [Disponible en línia a: `https://arxiv.org/abs/1704.00356`]

[36] STUBHAUG, A. *Gösta Mittag-Leffler. A man of conviction*. Berlín: Springer-Verlag, 2010.

[37] TENOW, N. B. «Felaktigheter i de Thieleska valmetoderna». *Statsvetenskaplig Tidskrift*, 15 (1912), 145–165.

[38] THIELE, T. N. «Om flerfoldsvalg». *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger*, 1895 (4) (1895), 415–441. [Resum en francès: «Sur la théorie des élections multiples et sur quelques règles d'application pratique». *Ibídem*, XV–XVIII]

[39] TIDEMAN, N. «The single transferable vote». *Journal of Economic Perspectives*, 9 (1) (1995), 27–38.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
`{Rosa.Camps,Xavier.Mora,Laia.Saumell}@uab.cat`